

文章编号: 1000-8055(2002)01-049-04

基于 Riemann 问题的解在自适应无结构 网格上求解 Euler 方程

常利娜, 尹 河, 严传俊

(西北工业大学 航空动力与热力工程系, 陕西 西安 710072)

摘要: 给出了一种根据 Riemann 问题的解, 计算网格单元边界处的守恒量通量的方法。该方法不受网格单元形状的限制, 具有较好的通用性。实际计算表明, 采用这一方法在自适应无结构网格上求解 Euler 方程, 对于复杂的流动细节具有较高的分辨率, 并且使用多重网格法能够加速收敛。

关键词: 自适应无结构网格; Riemann 问题的解; 二维 Euler 方程

中图分类号: V 231; TP391

文献标识码: A

An Algorithm for Euler Equations Using Adaptive Unstructured Grid Based on Riemann Problem Solution

CHANG Li-na, YIN He, YAN Chuan-jun

(Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China)

Abstract: An algorithm to solve two-dimensional Euler equations on adaptive unstructured grids is presented. It uses the analytical solution of Riemann problem to calculate the numerical conservative fluxes. With the velocity tangent to the face being treated as a passively advected quantity, the flux is obtained by solving Riemann problem for the projected equations along the normal to that face. Within the framework of adaptive mesh refinement, the algorithm obtains high resolution. Convergence to steady state is accelerated by multigrid method. Cases are run for subsonic and supersonic internal flows. The results show that the algorithm is robust and accurate, even in the presence of nonlinear discontinuities.

Key words: adaptive unstructured grid; solution of Riemann problem;
two-dimensional Euler equations

1 引 言

求解外形复杂流场的 Euler 方程的稳态问题时, 通常会遇到以下两个困难, 首先是如何得到合理的网格分布, 其次是如何提高 Euler 方程在这些网格上的求解效率。结构网格划分法是目前用得最多的网格划分方法, 但是当流场外形的几何

复杂程度提高时, 由这一方法生成网格的难度也随之迅速提高。无结构网格划分方法是另外一种类型的网格划分方法, 在无结构网格中, 几何实体之间的相对位置关系没有结构性的限制, 因此降低了网格划分的难度。但是, 与结构网格相比, 无结构网格上气动计算的数值求解器的发展则显得滞后得多, 另外, 在无结构网格中, 必须储存大量

收稿日期: 2001- 01- 29; 修订日期: 2001- 07- 01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59776001)

作者简介: 常利娜(1973-), 女, 西北工业大学航空动力与热力工程系博士生

的信息来定义网格中各实体的几何特性以及各实体之间的连接关系, 这给计算和存储带来较大的负担, 难以保证算法的高效执行。

Godunov 首次将 Riemann 问题及其相关解引入计算流体力学领域^[1], 给出了 Godunov 方法, 在 Godunov 方法中, 解本身就是由一系列间断解构成的, 因此当流动不光滑时, 计算结果仍能够很好地近似真实解的情况。基于 Godunov 方法的这一优点, 它在求解 Euler 方程的问题中获得了广泛应用, 但其中的大多数都是基于结构网格的^[2]。本文按照 Godunov 构造解的方法, 给出了一种在无结构网格上求解 Euler 方程的数值算法。

根据 Colella 所给的投影方法^[3], 本文给出了二维 Euler 方程在控制体单元边界法线方向上的投影方程, 考虑到沿边界切线方向的通量可以看作被动对流通量, 可以用一维 Euler 方程的 Riemann 解^[4]来确定通过控制单元边界的通量函数。为了提高计算精度, 文中将一维特征预测器^[5,6]用于基本气动参数 ρ, u, v, p 的插值计算中。

为了减少计算时间, 同时保证精度, 本文采用了自适应无结构网格。自适应无结构网格生成算法主要分为结点移动法、网格细化法和网格更新法三种, 本文采用了网格更新法。与前两种方法相比, 网格更新法生成的一系列自适应网格不会受初始网格规模或数值计算过程的限制, 因此能够更好的反映不同时刻气流的流动特点。在实际计算中, 本文还采用了多重网格法以加速收敛, 具体过程为: 首先在大尺寸的均匀初始网格上得到 Euler 方程的初步数值解, 分析这一初步解, 可以粗略得到主要流动特征的位置和形式, 据此重新划分计算域, 得到相应的自适应网格, 自适应网格上的计算初值可以在上一次计算结果的基础上插值得到; 这样根据已有网格上的数值解, 可以不断地生成新的自适应网格, 并以这一自适应网格作为计算网格, 在已有解的基础上继续进行计算, 最终可以得到较为精确的数值解。

2 确定通量函数

二维 Euler 方程是典型的守恒方程。用 $\partial\Gamma_j$ 表示控制体单元边界, 二维 Euler 方程在 $\partial\Gamma_j$ 外法线方向的投影方程为:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial G(W)}{\partial X} = 0 \quad (1)$$

$$W(X, t) = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u^N \\ \rho u^T \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad G(W) = \begin{bmatrix} \rho u^N \\ \rho(u^N)^2 + p \\ \rho u^N u^T \\ \rho u^N E + u^N p \end{bmatrix}$$

其中, ρ 表示密度, u^N 表示 $\partial\Gamma_j$ 外法线方向的速度分量, u^T 表示 $\partial\Gamma_j$ 切线方向的速度分量, E 表示单位质量的总能量。

取状态量 $V = (\rho, u^N, p^T)$, 由于 u^T 可以看作被动对流量^[3], 因此能够以 $\partial\Gamma_j$ 左右两侧的状态量 $V_{T,j,L}^{n+1/2}$ 和 $V_{T,j,R}^{n+1/2}$ 为初始间断条件, 采用一维 Euler 方程 Riemann 问题的求解方法^[4], 确定边界 $\partial\Gamma_j$ 处的参数 $\rho_{T,j}^{n+1/2}$, $(u_{T,j}^{n+1/2})^N$ 和 $p_{T,j}^{n+1/2}$ 。另一个参数 $(u_{T,j}^{n+1/2})^T$ 的值可以用下式估计:

$$\left. \begin{aligned} (u_{T,j}^{n+1/2})^T &= (u_{T,j,L}^{n+1/2})^T & u_{T,j}^{n+1/2} > 0 \\ (u_{T,j}^{n+1/2})^T &= (u_{T,j,R}^{n+1/2})^T & u_{T,j}^{n+1/2} \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $u_{T,j}^{n+1/2}$ 表示接触间断处的速度。这样就可以确定 $\partial\Gamma_j$ 处的投影状态量 $W_{T,j}^{n+1/2}$, 进而得到通量函数 $\Phi_{T,j}(U) = G(W_{T,j}^{n+1/2})$ 。

已知通量函数 $\Phi_{T,j}(U)$ 后, 根据二维 Euler 方程的积分形式^[5], 就可以得到求解 Euler 方程的迭代格式。对三角形控制体单元 T 有:

$$U_T^{n+1} = U_T^n - \frac{\Delta t}{S_T} \sum_{j=1}^3 \Phi_{T,j}(U) \Delta L_{T,j} \quad (3)$$

其中, $U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$, U_T^{n+1} 和 U_T^n 分别表示 t_{n+1} 与 t_n 时刻 U 在三角形重心处的取值, S_T 表示 T 的面积, $\Delta L_{T,j}$ 表示边 j 的长度, Δt 表示时间间隔, $\Phi_{T,j}(U)$ 表示三角形 T 的边 j 上的通量函数。

3 自适应无结构三角形网格的生成

一般而言, 如果解的误差均匀分布, 则计算网格是最优的^[7], 因此采用网格更新法生成自适应网格时, 需要根据解的误差分布情况, 确定新网格的几何参数。本文以密度 ρ 的一阶梯度值 $\nabla \rho$ 作为矢量 U 的误差表征量, 根据 $\nabla \rho$ 的值, 估计计算域中任意一点 P 处网格单元特征尺寸的期望值 δ_P :

$$\delta_P |\nabla \rho_P| = \text{const} \quad (4)$$

其中, $\nabla \rho_P$ 表示点 P 处的密度梯度值, const 为常数。用 $\delta_{\min}$ 表示新的自适应网格中, 规定的单元最小特征尺寸, $|\nabla \rho|_{\max}$ 表示计算域中, 密度梯度绝对值的最大值, 则 const 取为:

$$\text{const} = \delta_{\min} |\nabla \rho|_{\max} \quad (5)$$

对于三角形网格单元, 本文取外接圆半径作为特征尺寸。在(4)式和(5)式中, 用到了梯度值 $\nabla \rho$, 由于精确解的梯度值事先是不知道的, 本文根据上一次的数值解得到密度梯度的估计值 $\nabla \hat{\rho}$, $\nabla \hat{\rho}$ 的分布是由背景网格给出的。

本文基于阵面推进法, 根据网格单元特征尺

寸的期望值计算新加结点的位置, 然后按照 Delaunay 准则确定已有结点之间的连接关系^[8], 这样既可以实现网格生成的完全自动化, 又能够保证自适应网格的质量。网格生成过程主要包括以下几个步骤:

- (1) 根据上一次计算得到的数值解, 构造背景网格;
- (2) 查询背景网格, 得到边界上各点处密度梯度的估计值, 然后由(4)式计算得到相应的外接圆半径以及边长的期望值, 并据此离散边界;
- (3) 由边界上的离散点, 生成初始网格;
- (4) 在初始网格网格中, 对每一三角形单元, 查询背景网格计算得到重心处外接圆半径的期望值, 比较该三角形单元的实际外接圆半径与这一期望值, 若实际外接圆半径不超过这一期望值, 则将三角形设为可接受三角形, 否则将其设为不可接受三角形;
- (5) 将不可接受三角形分为有效三角形和预备三角形^[8];
- (6) 选取半径最小的有效三角形作为阵面三角形;
- (7) 选取阵面三角形的一条边作为确定新加结点的边, 查询背景网格计算得到该边中点处的外接圆半径的期望值;
- (8) 根据外接圆半径的期望值计算新加结点的位置;
- (9) 若新结点位于计算域内并与任一已有结点的距离大于某一限定值, 则按照 Bowyer-单元分为可接受三角形或不可接受三角形, 否则舍弃这一新结点, 并将阵面三角形设为可接受三角形;
- (10) 检查是否仍然存在不可接受三角形, 若不存在, 则得到相应于上次数值计算结果的自适应网格, 计算结束; 否则继续执行(5)到(10)。

4 算 例

4.1 亚音速管流

图 1(a) 给出了这一管道的相关几何尺寸, 其中, 上管壁和下管壁各有一个形状为 10% 余弦函数的凸起。在来流马赫数 $M_{a\infty} = 0.5$ 时, 该问题的理论解^[9]是: 管道内的流动为亚音速等熵流, 并且流动参数的分布关于凸起是对称的。

图 1(a) 和 (b) 分别给出了这一问题初始网格和自适应网格, 初始网格包含了 492 个结点, 自适应网格包含了 1162 个结点。在初始网格上迭代

1200 步后流动基本稳定, 根据此时的数值解生成自适应网格, 并以初始网格上的数值解作为初值, 在自适应网格上继续进行计算, 图 2(a) 给出了在自适应网格迭代 100 步后得到的压力等值线图。

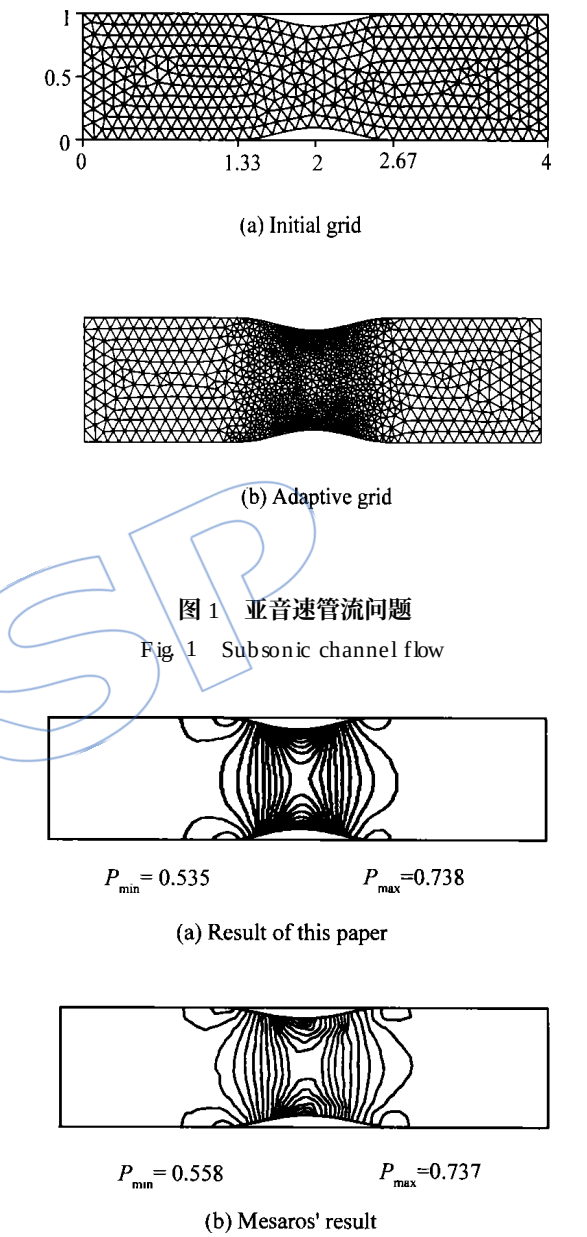


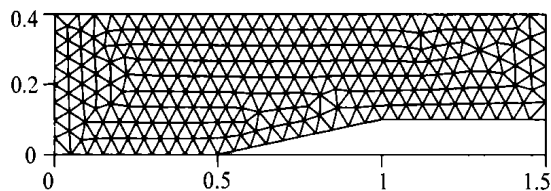
图 2 压力等值线图 (41 条等值线)
Fig 2 Pressure contours (41 contours)

图 2(b) 给出了 Mesaros 在边长为 0.1 的均匀无结构网格上采用稳态/非稳态分裂法得到的压力等值线图。比较图 2(a) 与 (b) 可以看出, 本文与 Mesaros 得到的压力等值线分布比较接近, 并且与后者相比, 前者关于凸起的对称性更加明显, 而且等值线分布也更平滑, 这可能是因为本文采用了自适应网格, 增加了凸起附近网格的密度, 从

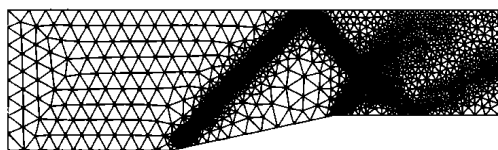
而提高了计算精度。

4.2 斜激波的反射

在这一算例中,管道中的压缩斜坡为 11.3° , 来流马赫数 $M_{a\infty} = 1.86$ 。图 3(a)和(b)给出了本



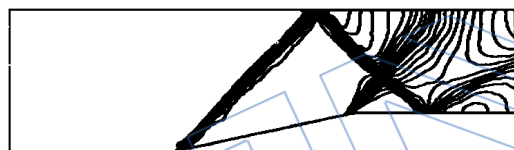
(a) Initial grid



(b) Adaptive grid

图 3 包含斜坡的管流问题

Fig 3 Duct containing a ramp



(a) Result of this paper



(b) Kania's result

图 4 压力等值线图(32 条等值线)

Fig 4 Pressure contours (32 contours)

文计算所用的初始网格以及第三次更新网格后得到的自适应网格,其中初始网格包含 274 个结点,473 个单元,自适应网格包含 2031 个结点,3924 个单元。图 4(a)给出了在自适应网格上迭代 100 步后得到的压力等值线图,其中, $p_{\min} = 0.988$, $p_{\max} = 3.076$,图 4(b)给出了 Kania 在结构矩形网格上采用 1800 (60×30) 个单元计算所得的结果。比较图 4(a)与(b),可以看出,本文的计算结果与 Kania 的计算结果^[10]基本相符,但在出口处却不

够一致。这可能是因为,出口处气流参数的分布比较复杂,而本文与 Kania 采用了不同的等值线生成算法,因此得到的等值线也有所不同。

5 结 论

本文建立了二维 Euler 方程在控制体单元边界法线方向的投影方程,将一维 Godunov 方法用于在无结构自适应网格上求解二维 Euler 方程的问题中。实际计算表明,这一构造解的方法既适用于亚音速流,又适用于超音速流。但是,文中所给算法对于激波和膨胀波的捕捉还不够理想,这可能是因为,本文根据三角形单元 3 个顶点处的参数值估算单元内的平均梯度值,因此容易抹平间断。改进梯度值的估算方法,有可能进一步提高计算精度。

参考文献

- [1] Godunov S K. A Finite Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics[J]. Sov. Mat. Sb., 1959, 47: 271- 306
- [2] Dudek S A, Colella P. A Godunov Steady-State Euler Solver for Structured Grids[R]. AIAA Paper, AIAA 97-0875, 1997.
- [3] Colella P. Multidimensional Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws[J]. J. Comp. Phys., 1990, 87: 171- 200
- [4] Gottlieb J J, Groth C P T. A sssessment of Riemann Solvers for Unsteady One Dimensional Inviscid Flows of Perfect Gases[J]. J. Comput. Phys., 1998, 78: 437- 458
- [5] 尹河, 常利娜, 严传俊. 在非结构网格上求解 Euler 方程的一种新算法[J]. 西北工业大学学报, 增刊, 2000, 18: 193- 195
- [6] 尹河, 常利娜, 严传俊. 非结构网格划分的喷管流场计算中单调性约束条件的研究[J]. 航空动力学报, 2000, 16(2): 131- 134
- [7] Oden J T. Grid Optimisation and Adaptive Meshes for Finite Element Methods [R]. University of Texas at Austin Notes, 1983
- [8] 尹河, 常利娜, 严传俊. 一种用于二维燃烧室流场计算的非结构网格的生成方法[J]. 航空动力学报, 1999, 14(4): 413 - 416
- [9] Mesaros L M. MutiDimensional Fluctuation Splitting Schemes for the Euler Equations on Unstructured Grids [D]. Aerospace Engineering and Scientific Computing in the Univerty of Michigan, 1995
- [10] Kania L. An Adaptive Grid Algorithm for Accurate Flow Field Calculations[R]. AIAA Paper, 1990: 90- 0327.